

10. cvičení - Lineární algebra - opakování

 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Rozhodněte zda W je podprostor vektorového prostoru X .

- (a) $W = \{(r, 2r, -r) : r \in \mathbb{R}\}, X = \mathbb{R}^3$
- (b) $W = \{(s+t, 2s-t+2, t+s) : s, t \in \mathbb{R}\}, X = \mathbb{R}^3$
- (c) $W = \{(rs+s, 2s, r, s) : r, s \in \mathbb{R}\}, X = \mathbb{R}^4$
- (d) $W = \{A \in M(n \times n) : A \text{ regulární}\}, X = M(n \times n)$
- (e)  $W = \{A \in M(n \times n) : \det A = 0\}, X = M(n \times n), n > 1$

Příklad 2. Rozhodněte zda následující vektory jsou lineárně nezávislé.

- (a) $(1, 0, -1, 1)^T, (2, 1, 0, 1)^T, (1, 0, 0, -1)^T, (2, 1, 1, 1)^T$
- (b)  $\sin x, \cos x, \sin 2x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
- (c) $\sin x, \cos x, \sin x \cos x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Příklad 3. Nalezněte nějakou bázi prostoru V a určete jeho dimenzi.

- (a) $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 1, 1, 2, 2), (-1, -2, -2, -2, 2), (19, 1, 1, 1, 1), (-1, -3, -3, -2, 6)\}$
- (b) $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{x+7, x^2-x-1, x^2+3, x-5\}$
- (c)  $\{A \in M(3 \times 3) : A^T = A\}$
- (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$
- (e) $\{f \in \mathcal{P}_3 : f''' = 0 \text{ na } \mathbb{R}\}$

Příklad 4. Rozhodněte zda L je lineární zobrazení a pokud ano určete jeho jádro a obraz.

- (a) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, L(u, v, w) = (u, u-w, u+v, v)$
- (b) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(u, v, w) = (u^2, u+v, 0)$
- (c) $L: \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), L(f)(x) = f(x+1) - f(x)$
- (d)  $L: \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), L(f)(x) = \int_0^x f(y) dy$
- (e) $L: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, L(f) = (f(0), f'(1))$
- (f) $L: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3, L(p)(x) = p(x) + x^2$, kde $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} : p \text{ je } n\text{-tého stupně}\}$



Příklad 5. Určete definitnost kvadratické formy B reprezentované maticí A .

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice A .

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 7. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou následující matice PD, ND, PSD, NSD nebo ID.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 337 & 338 & 400 & 398 \\ 338 & 415 & 371 & 399 \\ 400 & 371 & 333 & 343 \\ 398 & 399 & 343 & a \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & -1 & a & 13 \end{pmatrix}$$

